BEITRÄGE ZUR CARATHÉODORYSCHEN ALGEBRAISIERUNG DES INTEGRALBEGRIFFS

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

ARTUR BISCHOF
AUS LIEGNITZ

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 24. JULI 1940
TAG DER PROMOTION: 30. APRIL 1941

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 6

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT
PROFESSOR DR. H. GEPPERT

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band 5

Einleitung.

In seinem „Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs" versuchte CARATHÉODORY[1]), die Maß- und Integraltheorie auf eine allgemeinere Grundlage zu stellen. An die Stelle von Mengen, denen ein Maß zugeordnet bzw. über die integriert werden soll, treten beliebige Elemente, die CARATHÉODORY Somen nennt und zwischen denen Verknüpfungen definiert sind, mit denen ebenso operiert werden kann wie mit Summe und Durchschnitt in der Mengenlehre. Nach WECKEN[2]), der die CARATHÉODORYsche Arbeit anscheinend nicht kannte, läßt sich eine solche Verallgemeinerung der Integraltheorie in der Theorie der abstrakten fastperiodischen Funktionen vorteilhaft verwenden.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst aus einer teilweise geordneten Menge, die eine gewisse Eigenschaft besitzen soll, ein vollständiger BOOLEscher Ring konstruiert. Die Ausgestaltung eines J. v. NEUMANNschen Beweises liefert einen Isomorphiesatz, aus dem der Satz von STONE über Darstellung BOOLEscher Ring durch Mengenringe sowie einige Sätze der Maßtheorie gefolgert werden können. Die Maßtheorie ist Gegenstand von Teil III. In Teil II und IV werden Ortsfunktionen betrachtet. Die Konstruktion von I und ein Verfahren von MACNEILLE ermöglichen es, die von CARATHÉODORY angegebene Multiplikation von Maßfunktionen auf eine allgemeinere Grundlage zu stellen. Mit diesem Hilfsmittel könnte man auch Funktionen mehrerer Variablen definieren; auf die Fragestellungen, die sich hieran anschließen, bin ich nicht eingegangen.

Herrn Prof. Dr. E. SCHMIDT, der diese Arbeit angeregt hat, und Herrn Dr. H. L. SCHMID bin ich für wertvolle Literaturangaben zu Dank verpflichtet.

1) C. Carathéodory, *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs*. Sitzungsber. Akad. München 1938, S. 27—69.

2) F. Wecken, *Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen*. Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 377—404.

I. Konstruktion eines Booleschen Ringes aus einer teilweise geordneten Menge.

1. Sind A und B Teilmengen einer Menge E und bedeutet $A \cdot B$ den *Durchschnitt*, $A \dotplus B$ die *Diskrepanz* von A und B (d. h. die Menge der Elemente, die in genau einer der beiden Mengen A und B enthalten sind), so bildet die Menge aller Teilmengen von E bezüglich der Verknüpfungen $\cdot$ und $\dotplus$ einen Ring, in dem jedes Element seinem Quadrat gleich ist. Solche Ringe nennt man BOOLEsche Ringe. Für Mengen ist

$$A \dotplus A = 0 \quad \text{und} \quad AB = BA.$$

Das gilt auch für beliebige BOOLEsche Ringe, wie man aus

$$A \dotplus A = (A \dotplus A)^2 = A^2 \dotplus A^2 \dotplus A^2 \dotplus A^2 = A \dotplus A \dotplus A \dotplus A$$

und

$$A \dotplus B = (A \dotplus B)^2 = A^2 \dotplus AB \dotplus BA \dotplus B^2 = A \dotplus AB \dotplus BA \dotplus B$$

erkennt. Sind die Elemente des BOOLEschen Ringes Mengen, so läßt sich die Vereinigungsmenge in der Form

$$A \dotplus B = A \dotplus B \dotplus AB$$

darstellen; auch im allgemeinen Fall kann man eine Verknüpfung $\dotplus$ einführen. Das distributive Gesetz

$$A(B \dotplus C) = AB \dotplus AC$$

ist leicht zu verifizieren. Eine Menge $\mathfrak{M}$ wird als multiplikatives System bezeichnet, wenn in ihr eine kommutative Multiplikation definiert ist, bei der wie in BOOLEschen Ringen jedes Element seinem Quadrat gleich ist. Setzt man $A \subseteq B$ für $AB = A$, so wird $\mathfrak{M}$ hierdurch teilweise geordnet. Insbesondere kann ein BOOLEscher Ring durch diese Vorschrift teilweise geordnet werden. Einen BOOLEschen Ring mit Einheitselement, in dem Produkte beliebig vieler Elemente definiert sind, nennt man vollständig; kommutatives und assoziatives Gesetz sollen dabei erhalten bleiben, und ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren soll gleich dem Faktor sein. Auch die Verknüpfung $\dotplus$ läßt sich für beliebig viele Elemente definieren; wir schreiben

$$\Sigma A_\nu = \overline{\Pi \bar{A}_\nu},$$

wo $\bar{A} = E \dotplus A$ das *Komplement* von A ist. Wenn $A_\nu \supseteq A$ ist, so gilt $\Pi A_\nu \supseteq A$; denn es ist

$$A \Pi A_\nu = \Pi A A_\nu = \Pi A = A.$$

Hieraus folgt sofort $\sum A_\nu \subseteq A$ für $A_\nu \subseteq A$. Das distributive Gesetz $A(B+C) = AB + AC$ gilt in vollständigen BOOLEschen Ringen auch für beliebig viele Summanden:

$$A \sum B_\nu = \sum A B_\nu .$$

Zunächst ist nämlich trivialerweise

$$A \sum B_\nu \supseteq \sum A B_\nu ;$$

es ist also nur noch zu zeigen, daß

$$A(E + \prod \bar{B}_\nu) \subseteq E + \prod \overline{A B_\nu}$$

ist. Das folgt bei Beachtung von

$$\overline{A B_\nu}\, \bar{B}_\nu = \bar{B}_\nu \quad \text{und} \quad A \overline{A B_\nu} = A \bar{B}_\nu$$

aus

$$\begin{aligned} &A(E + \prod \bar{B}_\nu)(E + \prod \overline{A B_\nu}) \\ &= A(E + \prod \bar{B}_\nu + \prod \overline{A B_\nu} + \prod \overline{A B_\nu}\, \bar{B}_\nu) = A(E + \prod \overline{A B_\nu}) \\ &= A + \prod A \bar{B}_\nu = A(E + \prod \bar{B}_\nu). \end{aligned}$$

Durch Übergang zu den Komplementen folgt das zweite distributive Gesetz

$$A + \prod B_\nu = \prod (A + B_\nu).$$

2. $\mathfrak{L}$ sei eine teilweise geordnete Menge. Kommt das Element A vor B, so schreiben wir $A \subseteq B$; wir sagen dann, A sei in B enthalten oder sei Teil von B. Es sei ein Element o (Null) vorhanden, das in allen Elementen von $\mathfrak{L}$ enthalten ist. (Andernfalls führt man einfach ein solches Element ein.) Ist o das einzige Element, das gleichzeitig in A und in B enthalten ist, so heißen A und B fremd. Ich mache nun die Voraussetzung, daß aus $A \neq B$ die Existenz eines von Null verschiedenen, in B enthaltenen und zu A fremden Elementes C oder eines in A enthaltenen und zu B fremden Elementes $D \neq o$ folgt. Wir wollen $\mathfrak{L}$ zu einem vollständigen BOOLEschen Ring $\mathfrak{R}$ erweitern, und zwar so, daß die Relation $\subseteq$, die nach dem Obigen in $\mathfrak{R}$ definiert werden kann, für Elemente von $\mathfrak{L}$ mit der von vornherein gegebenen übereinstimmt. Ist $\mathfrak{L}$ ein BOOLEscher Ring, so ist die Voraussetzung über $\mathfrak{L}$ erfüllt; denn für $A \neq B$ ist

$$A(A + B) + B(A + B) = A + B \neq o,$$

also etwa

$$A(A + B) \neq o;$$

damit haben wir ein von Null verschiedenes Element, das in A enthalten und zu B fremd ist.

3. $\mathfrak{R}'$ sei die Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{L}$. In $\mathfrak{R}'$ will ich zunächst eine Relation $\subseteqq$ definieren: Ich schreibe

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (B_1, B_2, \ldots)$$

oder

$$(B_1, B_2, \ldots) \supseteqq (A_1, A_2, \ldots),$$

wenn jedes C, das zu allen B_ν fremd ist, auch zu allen A_ν fremd ist. (Wenn ich einige A_ν und B_ν mit natürlichen Zahlen numeriere, so soll dadurch nichts über Abzählbarkeit der Mengen $(A_1, A_2, \ldots)$ usw. ausgesagt werden.) Offenbar ist

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (B_1, B_2, \ldots),$$

wenn die erste Menge eine echte oder unechte Teilmenge der zweiten ist. Die Relation $\subseteqq$ ist transitiv. Denn gilt

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (B_1, B_2, \ldots),$$
$$(B_1, B_2, \ldots) \subseteqq (C_1, C_2, \ldots),$$

so existierte, wenn die Relation

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (C_1, C_2, \ldots)$$

falsch wäre, ein $F \neq 0$, das zu allen C_ν, aber nicht zu allen A_ν fremd wäre. Es gäbe also ein in F enthaltenes $G \neq 0$, das ebenfalls zu allen C_ν fremd, aber etwa in A_1 enthalten wäre. Wegen

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (B_1, B_2, \ldots)$$

könnte G nicht zu allen B_ν fremd sein. Es gäbe demnach ein in G enthaltenes $H \neq 0$, das etwa in B_1 enthalten, aber zu allen C_ν fremd wäre. Das widerspricht aber der vorausgesetzten Relation

$$(B_1, B_2, \ldots) \subseteqq (C_1, C_2, \ldots).$$

4. Gilt gleichzeitig

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (B_1, B_2, \ldots)$$

und

$$(B_1, B_2, \ldots) \subseteqq (A_1, A_2, \ldots),$$

so schreibe ich

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim (B_1, B_2, \ldots)$$

und nenne die beiden Teilmengen *äquivalent*. Diese Sprechweise ist berechtigt; denn die Relation $\sim$ ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Menge der Klassen, in die $\mathfrak{R}'$ nach dieser Äquivalenzrelation zerfällt, bezeichne ich mit $\mathfrak{R}$. Da aus

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim (A_1', A_2', \ldots),$$
$$(B_1, B_2, \ldots) \sim (B_1', B_2', \ldots)$$

und

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteqq (B_1, B_2, \ldots)$$

die Relation

$$(A_1', A_2', \ldots) \subseteqq (B_1', B_2', \ldots)$$

folgt, läßt sich auch in $\mathfrak{R}$ die Beziehung $\subseteqq$ definieren.

5. Als *Summe* $\Sigma(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$ erkläre ich die Vereinigungsmenge der $(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$. Aus

$$(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) \subseteq (B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)$$

folgt

$$\Sigma(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) \subseteq \Sigma(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots).$$

Denn sonst wäre ein $C \neq 0$ vorhanden, das zu allen $B_{\nu\mu}$ fremd, aber etwa in A_{11} enthalten wäre; das widerspräche aber der Voraussetzung

$$(A_{11}, A_{12}, \ldots) \subseteq (B_{11}, B_{12}, \ldots).$$

Insbesondere folgt aus

$$(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) \sim (B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots),$$

daß

$$\Sigma(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) \sim \Sigma(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)$$

ist. Es ist hiernach klar, wie die Summe einer Menge von Elementen aus $\mathfrak{R}$ zu definieren ist. Bei endlich vielen Elementen verwenden wir auch das Zeichen $+$.

6. Als *Komplement* $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ von $(A_1, A_2, \ldots)$ bezeichne ich die Menge $(B_1, B_2, \ldots)$ aller Elemente B_ν von $\mathfrak{L}$, die zu allen A fremd sind. Ist

$$(A_{11}, A_{12}, \ldots) \subseteq (A_{21}, A_{22}, \ldots),$$

so ist das Komplement $(B_{21}, B_{22}, \ldots)$ von $(A_{21}, A_{22}, \ldots)$ eine Teilmenge des Komplementes $(B_{11}, B_{12}, \ldots)$ von $(A_{11}, A_{12}, \ldots)$, so daß also

$$(B_{21}, B_{22}, \ldots) \subseteq (B_{11}, B_{12}, \ldots)$$

gilt. Für

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim (B_1, B_2, \ldots)$$

ist $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ mit $\overline{(B_1, B_2, \ldots)}$ identisch, also erst recht

$$\overline{(A_1, A_2, \ldots)} \sim \overline{(B_1, B_2, \ldots)};$$

man kann demnach auch in $\mathfrak{R}$ ein Komplement definieren. Wird die ganze Menge $\mathfrak{L}$ als Element von $\mathfrak{R}'$ betrachtet, so will ich sie mit E' bezeichnen. Es ist

$$(A_1, A_2, \ldots) + \overline{(A_1, A_2, \ldots)} \sim E'$$

und

$$\overline{\overline{(A_1, A_2, \ldots)}} \sim (A_1, A_2, \ldots).$$

Die erste Behauptung ist trivial; die zweite beweist man folgendermaßen: Zunächst gilt offenbar

$$(A_1, A_2, \ldots) \subseteq \overline{\overline{(A_1, A_2, \ldots)}};$$

denn $(A_1, A_2, \ldots)$ ist Teilmenge von $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$. Wäre die Relation

$$\overline{\overline{(A_1, A_2, \ldots)}} \subseteq (A_1, A_2, \ldots)$$

falsch, so gäbe es ein von Null verschiedenes B, das zu allen A_ν fremd, aber in einem Element von $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ enthalten und deshalb selbst Element von $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ wäre. B wäre dann jedenfalls zu allen Elementen von $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ fremd; andererseits müßte B selbst Element von $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ sein. Das ist ein Widerspruch, da B von Null verschieden ist.

7. Indem man

$$\Pi(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) = \overline{\Sigma(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)}$$

setzt, kann man in $\mathfrak{R}'$ und natürlich auch in $\mathfrak{R}$ eine *Multiplikation* definieren. Für

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim (B_1, B_2, \ldots)$$

ist $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ mit $\overline{(B_1, B_2, \ldots)}$, also auch $\overline{\overline{(A_1, A_2, \ldots)}}$ mit $\overline{\overline{(B_1, B_2, \ldots)}}$ identisch. Es liegt deshalb nahe, die Menge $\overline{(A_1, A_2, \ldots)}$ als *Normaldarstellung* von $(A_1, A_2, \ldots)$ zu betrachten.

Ich behaupte jetzt: Sind $(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$ sämtlich Normaldarstellungen, so ist der Durchschnitt der Mengen $(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$ die Normaldarstellung des Produktes $\Pi(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$.

Ist nämlich A Element der Normaldarstellung dieses Produktes, so st A wegen

$$\Pi(A_{\varrho 1}, A_{\varrho 2}, \ldots) \subseteqq (A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$$

auch Element aller Mengen $(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$; gehört umgekehrt A zu allen Mengen $(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$, so ist

$$(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) \supseteqq (A),$$

also

$$\Pi(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots) \supseteqq (A);$$

A gehört demnach tatsächlich zur Normaldarstellung von

$$\Pi(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots).$$

$(B_1, B_2, \ldots)$ heiße *halbnormale Darstellung* von $(A_1, A_2, \ldots)$, wenn

$$(B_1, B_2, \ldots) \sim (A_1, A_2, \ldots)$$

ist und jedes in einem B_ν enthaltene Element von $\mathfrak{L}$ ebenfalls ein B_ν ist. Ein Element von $\mathfrak{R}'$ nenne ich halbnormal, wenn es eine halbnormale Darstellung von sich selbst ist. Sind die Mengen $(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sämtlich halbnormal, so ist der Durchschnitt dieser Mengen eine halbnormale Darstellung des Produktes $\Pi(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)$. Denn zunächst ist der Durchschnitt halbnormaler Elemente von $\mathfrak{R}'$ wieder halbnormal; ich brauche deshalb nur zu beweisen, daß der Durchschnitt D der Mengen $(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)$ ihrem Produkt äquivalent ist.

$$D \subseteq \Pi(B_{\nu 1},\ B_{\nu 2},\ \ldots)$$

ist trivial. Wäre F von Null verschieden und zu allen Elementen von D fremd, aber in einem Element von $\Pi(B_{\nu 1},\ B_{\nu 2},\ \ldots)$ enthalten, so hätte man

$$(F) \subseteq \overline{\Sigma(B_{\nu 1},\ B_{\nu 2},\ \ldots)};$$

F wäre zu allen Elementen von $\overline{(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ fremd. Demnach gäbe es ein von Null verschiedenes $F_1 \subseteq F$, das etwa in B_{11} enthalten wäre. Da F_1 zu allen Elementen von $\overline{(B_{21}, B_{22}, \ldots)}$ fremd sein müßte, gäbe es ein von Null verschiedenes $F_2 \subseteq F_1$, das in einem $B_{2\nu}$ enthalten wäre. Man käme auf diese Weise offenbar zu einem $F_n \neq 0$, das in allen $(B_{\nu 1},\ B_{\nu 2},\ \ldots)$ und infolgedessen auch in D enthalten und trotzdem wegen $F_n \subseteq F$ zu allen Elementen von D fremd sein müßte; das ist ein Widerspruch.

Es ist jetzt leicht, das distributive Gesetz

$$(A_1, A_2, \ldots)\Sigma(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots) \sim \Sigma(A_1, A_2, \ldots)(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)$$

zu beweisen. Nimmt man nämlich alle hierin vorkommenden Elemente als halbnormal an, so braucht man nur die auftretenden Verknüpfungen mengentheoretisch zu deuten. Dadurch entsteht offenbar rechts und links dieselbe Menge. Durch Übergang zu den Komplementen ergibt sich das zweite distributive Gesetz:

$$(A_1, A_2, \ldots) + \Pi(B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots) \sim \Pi((A_1, A_2, \ldots) + (B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots)).$$

Daß ein allgemeines distributives Gesetz, etwa von der Form

$$\prod_{\nu}\sum_{\mu}(A_{\nu\mu 1},\ A_{\nu\mu 2},\ \ldots) \sim \sum_{\nu}\prod(A_{\nu\mu_\nu 1},\ A_{\nu\mu_\nu 2},\ \ldots)$$

nicht zu gelten braucht, werde ich weiter unten an einem Beispiel zeigen.

Definiert man

$$A + B = (A + B)\overline{AB} \qquad (A,\ B \in \mathfrak{R}),$$

so ist $\mathfrak{R}$ ein vollständiger Boolescher Ring. Die Rechenregeln

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

und

$$A(B + C) = AB + AC$$

sind leicht zu verifizieren. Die Voraussetzung über $\mathfrak{L}$ wurde bisher nicht benutzt; sie kommt erst in dem folgenden Satz zur Geltung. $\mathfrak{L}$ läßt sich eineindeutig unter Erhaltung der Beziehung $\subseteq$ auf ein Teilsystem von $\mathfrak{R}$ abbilden. Man braucht nur dem Element A von $\mathfrak{L}$ diejenige Klasse von $\mathfrak{R}$ zuzuordnen, die die Menge (A) enthält. Wenn wir die Elemente von $\mathfrak{L}$ mit den ihnen entsprechenden Elementen von $\mathfrak{R}$ identifizieren, so können wir $\mathfrak{R}$ als Erweiterung von $\mathfrak{L}$ auffassen.

Ohne die Voraussetzung über $\mathfrak{L}$ wäre die Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ eindeutig, aber nicht umkehrbar eindeutig. Die Konstruktion von $\mathfrak{R}$ verliert dann an Interesse. Sind in $\mathfrak{L}$ schon gewisse Summen definiert, aber so, daß $A_\nu \subseteq \sum A_\nu$ ist und daß B zu $\sum A_\nu$ fremd ist, sobald B zu allen A_ν fremd ist, so stimmen diese Summen mit den in $\mathfrak{R}$ gebildeten überein; denn es gibt nur ein Element von $\mathfrak{R}$, das alle A_ν enthält und zu allen $B \in \mathfrak{L}$ fremd ist, die zu allen A_ν fremd sind. Entsprechendes gilt für das Produkt.

8. Ich setze jetzt $\mathfrak{L}$ als multiplikatives System voraus. Dann stimmt die Multiplikation in $\mathfrak{L}$ mit der in $\mathfrak{R}$ definierten überein. $\mathfrak{S}$ sei ein vollständiger BOOLEscher Ring, der $\mathfrak{L}$ enthält. Für Elemente von $\mathfrak{L}$ soll die Multiplikation in $\mathfrak{S}$ ebenso definiert sein wie in $\mathfrak{L}$. Ich behaupte, daß dann $\mathfrak{R}$ einem Teilring von $\mathfrak{S}$ in bezug auf Verknüpfungen endlich vieler Elemente isomorph ist.

A sei ein Element von $\mathfrak{R}$; ich betrachte alle Elemente von $\mathfrak{L}$, die in $\bar{A}$ enthalten sind, bilde ihr Komplement nach den in $\mathfrak{S}$ geltenden Rechenregeln, bezeichne das Produkt dieser Komplemente mit $\widehat{A}$ und setze $\tilde{A} = \widehat{A}\,\widehat{O}$. Für $C \subseteq D$ ist $\tilde{C} \subseteq \tilde{D}$; denn in dem Produkt für $\widehat{C}$ kommen alle in dem Produkt für $\widehat{D}$ auftretenden Faktoren vor. Hieraus folgt sofort

$$\widetilde{A + B} \supseteq \tilde{A} + \tilde{B},$$

aber es gilt sogar

$$\widetilde{A + B} = \tilde{A} + \tilde{B}.$$

Es ist nämlich nach dem zweiten distributiven Gesetz

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \prod \bar{G} + \prod \bar{H} = \prod \overline{GH},$$

wobei G bzw. H alle diejenigen Elemente von $\mathfrak{L}$ durchläuft, die in $\bar{A}$ bzw. $\bar{B}$ enthalten sind. Alle $\overline{GH}$ kommen in dem Produkt für $\widehat{A + B}$ vor, also ist

$$\widetilde{A + B} \subseteq \tilde{A} + \tilde{B},$$

was zusammen mit der trivialen Beziehung

$$\widetilde{A + B} \supseteq \tilde{A} + \tilde{B}$$

die Behauptung ergibt.

Um nun zu einer isomorphen Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf eine Teilmenge von $\mathfrak{L}$ zu kommen, kann man den NEUMANNschen Beweis[3]) für einen Spezialfall unseres Satzes folgendermaßen abändern:

3) J. v. Neumann, *Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null"*. Journ. f. Math. 165 (1931), S. 109—115.

Die Mengen $\mathfrak{M}_{k_\alpha}$ ersetze man durch die Elemente $\bar{A}$. Von den $\mathfrak{M}_{k_\alpha}$ benutzt NEUMANN nur die Tatsache, daß

$$\mathfrak{M}_{k_\alpha} + \mathfrak{M}_{k_\beta} = \mathfrak{M}_{k_\alpha \dotplus k_\beta}$$

ist. Die entsprechende Gleichung

$$\widetilde{A \dotplus B} = \bar{A} + \bar{B}$$

ist aber soeben bewiesen worden. Daß die Abbildung isomorph und nicht homomorph ist, erkennt man folgendermaßen: Wäre $A_\nu + A_\mu$ und $A_\nu' = A_\mu'$, so müßte ein von Null verschiedenes Element B von $\mathfrak{L}$, das etwa in A_ν enthalten und zu A_μ fremd wäre, als Bild B' das Nullelement von $\mathfrak{S}$ haben. Das widerspricht aber, wenn $E' = \widehat{O}$ gewählt wird, der aus

$$A_{\nu_1}' \cdots A_{\nu_n}' \bar{A}_{\mu_1}' \cdots \bar{A}_{\mu_m}' \subseteq \widetilde{A_{\nu_1} \cdots A_{\nu_n} \bar{A}_{\mu_1} \cdots \bar{A}_{\mu_m}} \qquad (n \geqq 1,\ m \geqq 0)$$

folgenden Relation $\widehat{O}\bar{B}' \subseteq \bar{\bar{B}}$. Bildet man zu jedem $A \in \mathfrak{S}$ nach den in $\mathfrak{R}$ geltenden Rechenregeln die Komplemente der in $\bar{A}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{L}$ und dann das Produkt $\widehat{A}$ dieser Komplemente, so gilt

$$\widehat{A \dotplus B} = \widehat{A} \dotplus \widehat{B},$$

und man kann ähnlich wie vorhin eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{R}$ erhalten. Daß die Abbildung auf den ganzen Ring $\mathfrak{R}$ erfolgt, ergibt sich daraus, daß der in $\mathfrak{S}$ gebildeten Summe aller in dem Element C von $\mathfrak{R}$ enthaltenen $L \in \mathfrak{L}$ als Bild C entsprechen muß; denn dieses Bild muß alle $L \subseteq C$ enthalten und zu allen $D \in \mathfrak{L}$ fremd sein, die zu allen $L \subseteq C$ fremd sind; C ist aber das einzige Element von $\mathfrak{R}$ mit diesen Eigenschaften.

Ist das multiplikative System $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{L}'$ homomorph abbildbar, so existiert eine homomorphe Abbildung des aus $\mathfrak{L}$ konstruierten vollständigen BOOLEschen Ringes $\mathfrak{R}$ auf einen Teilring des aus $\mathfrak{L}'$ konstruierten Ringes $\mathfrak{R}'$. Ist nämlich A ein Element von $\mathfrak{L}$ und setzen wir $\bar{A} = \prod G'$, wo G' das G entsprechende Element von $\mathfrak{L}'$ ist und G alle in $\bar{A}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{L}$ durchläuft, so gilt wieder

$$\widetilde{A \dotplus B} = \bar{A} + \bar{B},$$

und der Beweis wird wie oben zu Ende geführt.

9. $\mathfrak{L}$ sei ein BOOLEscher Ring, A ein Element von $\mathfrak{L}$, A' die Menge aller in A enthaltenen $L \in \mathfrak{L}$. Ordnet man jedem $A \in \mathfrak{L}$ die Menge A' zu, so erhält man eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf die Menge $\mathfrak{L}'$ der A', bei der mengentheoretischen Durchschnitten in $\mathfrak{L}'$ Produkte in $\mathfrak{L}$ entsprechen. Ist $\mathfrak{S}$ der von den A' erzeugte vollständige BOOLEsche Mengenring, so liefert der obige Satz eine isomorphe Abbildung

von $\mathfrak{L}$ auf einen Teilring von $\mathfrak{S}$. Es gibt also einen zu $\mathfrak{L}$ isomorphen Mengenring. Dieser Satz ist auf anderem Wege von STONE bewiesen worden.[4])

Ist $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ ein vollständiger BOOLEscher Ring ist, und gilt nicht $A \subseteq B$, so liefert der zweite Satz von 8. eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf den aus O und E bestehenden BOOLEschen Ring $\mathfrak{R}_0$, bei der A auf E, B auf O abgebildet wird. Ordnet man jedem $C \in \mathfrak{R}$ die Menge der Homomorphien zu, die C auf E abbilden, so hat man einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Mengenring. Der Beweis von STONE und für den Fall eines BOOLEschen Ringes auch der von BIRKHOFF bestehen darin, daß die Existenz einer homomorphen Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}_0$ mit der genannten Eigenschaft auf anderem Wege bewiesen wird. Übrigens kann man auch dann, wenn man $\mathfrak{L}$ als teilweise geordnete Menge mit der in 2. genannten Eigenschaft voraussetzt, Aussagen in Richtung der Sätze von 8. beweisen.

II. Ortsfunktionen in Booleschen Ringen.

1. CARATHÉODORY definiert a. a. O.[1]) Ortsfunktionen in BOOLEschen Ringen (mit unwesentlichen Unterschieden) folgendermaßen: Jedem von Null verschiedenen Element $A \subseteq D$ (D = Definitionsbereich der Funktion) sei eine reelle Zahl $\alpha(A)$ (die untere Grenze) und eine reelle Zahl $\beta(A)$ (die obere Grenze der Funktion auf A) zugeordnet. Es sei

$$\alpha(A) \leqq \beta(A), \quad \alpha(A) \geqq \alpha(B) \quad \text{und} \quad \beta(A) \leqq \beta(B) \text{ für } A \subseteq B,$$

und es existiere zu jedem λ in $(\alpha(D), \beta(D))$ ein S_λ, so daß

$$\beta(S_\lambda) \leqq \lambda, \quad \alpha(A) \geqq \lambda \text{ für } A S_\lambda = 0$$

ist.

WECKEN[5]) benutzt für den Fall, daß in dem BOOLEschen Ring Summen und Produkte abzählbar vieler Elemente definiert sind, die *charakteristische Schar*, d. h. die Elemente $[f < \lambda]$ zur Erklärung der Ortsfunktionen. Jedem λ wird also ein A_λ zugeordnet; es soll $A_\lambda \subseteq A_\mu$ sein für $\lambda < \mu$ und außerdem soll $A_\lambda = \sum A_{\lambda_\nu}$ gelten, wenn die Folge λ_1, λ_2, ... aufsteigend nach λ konvergiert.

CARATHÉODORY hat noch folgende Definition gegeben[6]): Eine Ortsfunktion wird erklärt durch eine *Somenskala*; d. h. es wird jeder reellen

4) a) M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras*. Transact. Amer. math. Soc. 40 (1936), S. 37—111. — b) Vgl. auch G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 29 (1933), S. 441—464, Theorem 25, 2.

5) A. a. O. [2]).

6) C. Carathéodory, *Über die Differentiation von Maßfunktionen*. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 181—189.

Zahl λ ein Element S_λ des BOOLEschen Ringes zugeordnet. Dabei soll $S_\lambda \subseteq S_\mu$ sein für $\lambda < \mu$. Zwei Somenskalen S_λ und T_λ definieren dieselbe Ortsfunktion, wenn für $\lambda < \mu$ stets $S_\lambda \subseteq T_\mu$ und $T_\lambda \subseteq S_\mu$ ist.

Sind in dem BOOLEschen Ring Summen und Produkte abzählbar vieler Elemente erklärt, so ist also die WECKENsche Definition anwendbar, und alle drei Definitionen sind gleichwertig.

2. Ich will im folgenden eine andere *Erklärung der Ortsfunktionen* zugrundelegen: Jedem in D enthaltenen $A \neq 0$ sei wie in der ersten CARATHÉODORYschen Definition ein $\alpha(A)$ und ein $\beta(A)$ zugeordnet. Es sei

$$\alpha(A) = \inf_{B \subseteq A} \beta(B), \tag{1}$$

$$\beta(A) = \sup_{B \subset A} \alpha(B). \tag{2}$$

Ist durch $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ eine Ortsfunktion im Sinne der CARATHÉODORYschen Definition gegeben, so sind die Gleichungen (1) und (2) erfüllt. Um (1) zu beweisen, habe ich nur

$$\alpha(A) < \inf_{B \subseteq A} \beta(B)$$

zu einem Widerspruch zu führen, da ja

$$\alpha(A) \leqq \inf_{B \subseteq A} \beta(B)$$

trivial ist. Wäre

$$\alpha(A) < \lambda < \inf_{B \subseteq A} \beta(B),$$

so wäre $A S_\lambda \neq 0$, da sonst $\alpha(A) \geqq \lambda$ sein müßte. Demnach ist

$$\beta(A S_\lambda) \leqq \beta(S_\lambda) \leqq \lambda$$

im Widerspruch zu der aus

$$\lambda < \inf_{B \subset A} \beta(B)$$

folgenden Ungleichung

$$\beta(A S_\lambda) > \lambda.$$

Analog wird (2) bewiesen.

Ist $\mathfrak{R}$ ein vollständiger BOOLEscher Ring, so ist auch umgekehrt durch $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ eine Ortsfunktion im Sinne der CARATHÉODORYschen Definition gegeben, wenn die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Daß $\alpha(A) \leqq \beta(A)$ ist und daß $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ monton nicht zunehmend bzw. nicht abnehmend sind, ist trivial. Aus (1) und (2) folgen die Gleichungen

$$\beta(\sum A_\lambda) = \sup_\lambda \beta(A_\lambda), \tag{3}$$

$$\alpha(\sum A_\lambda) = \inf_\lambda \alpha(A_\lambda). \tag{4}$$

Zunächst ist nämlich

$$\beta(\sum A_\lambda) = \sup_{B \subseteq \sum A} \alpha(B).$$

Gilt nun

$$C \subseteq \sum A_\lambda \quad \text{und} \quad \alpha(C) \geqq \beta(\sum A_\lambda) - \varepsilon,$$

so ist für ein A_ν, das zu C nicht fremd ist,

$$\alpha(C A_\nu) \geqq \alpha(C) \geqq \beta(\sum A_\lambda) - \varepsilon,$$

so daß

$$\beta(\sum A_\lambda) \leqq \sup_\nu \sup_{F \subseteq A_\nu} \alpha(F) = \sup_\nu \beta(A_\nu)$$

ist. Andererseits gilt wegen der Monotonieeigenschaft von β

$$\beta(\sum A_\lambda) \geqq \sup_\nu \beta(A_\nu).$$

Die Gleichung (4) wird analog bewiesen.

Nun ist es leicht, ein S_λ herzustellen, wie es in der CARATHÉODORY-schen Definition verlangt wird. Man setzt S_λ gleich der Summe aller A mit $\beta(A) \leqq \lambda$. Nach (3) ist dann $\beta(S_\lambda) \leqq \lambda$, und für jedes zu S_λ fremde $C \neq 0$ muß $\alpha(C) \geqq \lambda$ sein. Ist $\mathfrak{R}$ ein vollständiger BOOLEscher Ring, gilt (4) für die Funktion $\alpha(A)$ und definiert man β durch (2), so gilt (1), und es ist somit durch $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ eine Ortsfunktion erklärt. Man könnte also Ortsfunktionen auch durch (4) definieren, sofern der BOOLEsche Ring vollständig ist. Um (1) unter den angegebenen Voraussetzungen zu beweisen, bilden wir die Summe S aller $B \subseteq A$, für die

$$\alpha(B) \geqq \alpha(A) + \varepsilon$$

ist. Wegen (4) ist $A \neq S$. Für jedes von Null verschiedene C, das in $A + S$ enthalten ist, gilt also

$$\alpha(C) \leqq \alpha(A) + \varepsilon,$$

demnach auch wegen (2)

$$\beta(C) \leqq \alpha(A) + \varepsilon,$$

woraus (1) folgt.

3. $\mathfrak{R}$ sei homomorph auf $\mathfrak{R}_0$ abgebildet, wo $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ vollständige BOOLEsche Ringe sind und wobei sich die Homomorphie auch auf Verknüpfungen abzählbar vieler Elemente erstreckt. In $\mathfrak{R}_0$ sei durch α_0, β_0 eine Ortsfunktion f_0 definiert; dann kann man in $\mathfrak{R}$ eine Ortsfunktion f definieren, so daß $[f < \lambda]$ (die Summe aller A mit $\beta(A) < \lambda$) durch den Homomorphismus auf $[f_0 < \lambda]$ abgebildet wird. Man wählt für jedes λ_ν einer in $(\alpha_0(D_0), \beta_0(D_0))$ dicht liegenden Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ irgendein $A_\nu' \in \mathfrak{R}$, das dem Element $[f_0 < \lambda_\nu]$ entspricht, und verfährt dann wie bei CARATHÉODORY.[7])

7) C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig und Berlin 1918, § 368.

4. Die Definition (1), (2) der Ortsfunktionen ist deshalb berechtigt, weil man in dem Fall, daß $\mathfrak{R}$ ein Mengenring ist, auf den gewöhnlichen Funktionsbegriff zurückkommt. Ist (im allgemeinen Fall) $\mathfrak{M}$ ein zu $\mathfrak{R}$ isomorpher Mengenring, so kann man jeder in $\mathfrak{R}$ definierten Ortsfunktion f eine in einem Element von $\mathfrak{M}$ definierte Funktion f so zuordnen, daß $\alpha(A)$ gleich der unteren Grenze, $\beta(A)$ gleich der oberen Grenze von $\bar{f}$ auf dem A entsprechenden Element von $\mathfrak{M}$ ist; diese Zuordnung ist eindeutig.

Auf die Definition der Summe und des Produktes von Ortsfunktionen sowie der unteren und oberen Grenze einer Menge von Ortsfunktionen usw. brauche ich wohl nicht näher einzugehen. Nur folgendes ist erwähnenswert. Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom in den x_ν und sind die f_ν Ortsfunktionen, so hat $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ einen bestimmten Sinn. Will man $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ für beliebige BAIREsche Funktionen φ definieren, so muß man von der Konvergenz einer Folge

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots$$

auf die Konvergenz der Folge

$$\varphi_1(f_1, \ldots, f_n), \quad \varphi_2(f_1, \ldots, f_n), \quad \ldots$$

schließen können. Dieser Schluß ist aber in der Tat möglich; denn es ist (in der obigen Bezeichnungsweise)

$$\bar{f}_1 \bar{f}_2 = \overline{f_1 f_2}, \quad \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \overline{f_1 + f_2}, \quad \inf_\nu \bar{f}_\nu = \overline{\inf_\nu f_\nu},$$

und durch Induktion ergibt sich

$$\varphi(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = \overline{\varphi(f_1, \ldots, f_n)}.$$

III. Maßfunktionen.

1. In dem BOOLEschen Ring $\mathfrak{R}$ seien jetzt Verknüpfungen abzählbar vieler Elemente ausführbar, $\mathfrak{S}$ sei ein Teilring mit derselben Eigenschaft; $m(A)$ sei eine in $\mathfrak{S}$ definierte nichtnegative, totaladditive, endliche Funktion (Maßfunktion). Wir definieren für $A \in \mathfrak{R}$ als *inneres Maß von A*

$$m_i(A) = \sup_{\substack{B \in \mathfrak{S} \\ B \subset A}} m(B)$$

und als *äußeres Maß von A*

$$m_a(A) = \inf_{\substack{B \in \mathfrak{S} \\ B \supset A}} m(B).$$

$\mathfrak{M}$ sei der Ring aller Elemente von $\mathfrak{R}$, für die das äußere Maß gleich dem inneren ist (meßbare Elemente), $\mathfrak{N}$ der Teilring von $\mathfrak{M}$, dessen Elemente das Maß Null haben. Der Restklassenring $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ist offen-

bar ein BOOLEscher Ring, in dem Verknüpfungen abzählbar vieler Elemente ausführbar sind; denn $\mathfrak{N}$ enthält mit abzählbar vielen Elementen von $\mathfrak{M}$ auch deren Summe. In $\mathfrak{S}$ kann die Funktion m definiert werden, weil m für alle Elemente einer Restklasse denselben Wert hat. $\mathfrak{S}$ erfüllt als BOOLEscher Ring die Voraussetzung von I, 2., infolgedessen ist das Verfahren von I. anwendbar. Jedoch erkennt man, daß der so konstruierte vollständige BOOLEsche Ring mit $\mathfrak{S}$ identisch ist. Das hat folgenden Grund:

Bilden die A_ν eine beliebige Menge von Elementen aus $\mathfrak{S}$, wobei die Indizes ν einen Abschnitt von Ordnungszahlen durchlaufen, so können unter den Zahlen $m(\sum_{\nu<\varrho} A_\nu)$ nur abzählbar viele verschiedene vorkommen. Demnach ist $\sum A_\nu$ gleich der Summe abzählbar vieler A_ν und gehört deshalb zu $\mathfrak{S}$.[8]) Solche BOOLEschen Ringe wie $\mathfrak{S}$, in denen also eine totaladditive Maßfunktion definiert ist, die nur für das Nullelement verschwindet, nennt WECKEN Σ-Systeme.

2. Ist μ eine zweite in $\mathfrak{N}$ definierte Maßfunktion, die für alle Elemente A verschwindet, für die $m(A) = 0$ ist, so sind die Elemente von $\mathfrak{M}$ auch für μ meßbar. Denn zu jedem Element A von $\mathfrak{M}$ gibt es zwei Elemente K, H von $\mathfrak{N}$, so daß

$$K \subseteq A \subseteq H \quad \text{und} \quad m(K) = m(A) = m(H)$$

ist. Hieraus ergibt sich

$$m(H \dotplus K) = 0,$$

also

$$\mu(H \dotplus K) = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Offenbar kann man μ auch in $\mathfrak{S}$ definieren. Es ist jetzt leicht, μ als Integral $\int f dm$ darzustellen. (Das Integral kann man etwa in der üblichen Weise durch Ordinatenteilung erklären.) Zu diesem Zweck bilden wir für $A \in \mathfrak{S}$, $A \neq 0$

$$\alpha(A) = \inf_{B \subseteq A} \frac{\mu(B)}{m(B)}, \quad \beta(A) = \sup_{B \subseteq A} \frac{\mu(B)}{m(B)}.$$

Es sind zunächst die Gleichungen (1) und (2) zu beweisen. Wäre

$$\alpha(A) < k < \inf_{B \subseteq A} \beta(B),$$

so gäbe es zu jedem von Null verschiedenen $C \subseteq A' \subseteq A$ ein von Null verschiedenes $D \subseteq C$ mit $\frac{\mu(D)}{m(D)} > k$. Man kann jetzt jeder Zahl ν eines

8) Vgl. hierzu auch a. a. O. [2]), S. 380.

hinreichend großen Abschnittes von Ordnungszahlen ein D_ν so zuordnen, daß

$$D_\nu \sum_{\varrho<\nu} D_\varrho = 0 \text{ und } \frac{\mu(D_\nu)}{m(D_\nu)} > k$$

ist. Natürlich wird A' schon durch abzählbar viele D_ν erschöpft, und es gilt

$$\frac{\mu(A')}{m(A')} = \frac{\mu(\Sigma D_\nu)}{m(\Sigma D_\nu)} > k;$$

das ist ein Widerspruch. Hiermit ist (1) bewiesen; ebenso folgt (2).

Durch α und β ist also eine Ortsfunktion f definiert. Um zu zeigen, daß $\mu(A)$ gleich dem Integral $\int_A f\,dm$ ist, braucht man nur das Integral durch die Summe

$$\Sigma\, y_\nu m(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}])$$

hinreichend genau zu approximieren. Nach der Definition von f ist

$$\alpha(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}]) \geqq y_\nu,$$

falls $A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}] \neq 0$ ist, also

$$\mu(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}]) \geqq y_\nu m(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}])$$

und infolgedessen

$$\mu(A) \geqq \Sigma\, y_\nu m(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}]);$$

ebenso ist

$$\beta(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}]) \leqq y_{\nu+1},$$

also

$$\mu(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}]) \leqq y_{\nu+1} m(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}])$$

und infolgedessen

$$\mu(A) \leqq \Sigma\, y_{\nu+1} m(A\,[y_\nu \leqq f < y_{\nu+1}]),$$

woraus die Behauptung folgt.

Auf Grund der in II, 3. gemachten Bemerkung kann man μ auch in $\mathfrak{R}$ als Integral $\int f\,dm$ darstellen.

Ich lasse jetzt die Voraussetzung, daß $\mu(A) = 0$ aus $m(A) = 0$ folgen soll, fallen. Statt $\mathfrak{S}$ betrachte ich dann den Restklassenring $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}/\mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{P}$ der Ring aller Elemente A von $\mathfrak{M}$ mit

$$m(A) + \mu(A) = 0$$

ist. Ist S die Summe aller Elemente B von $\mathfrak{T}$ mit $\mu(B) = 0$, so ist natürlich S gleich der Summe abzählbar vieler solcher B, und man hat infolgedessen $\mu(S) = 0$, während $\mu(C) > 0$ für jedes zu S fremde $C \neq 0$ ist. Demnach sind auf $E + S$ die vorigen Betrachtungen anwendbar. Setzt man

$$\mu(A) = \mu(A\,(E + S)) + \mu(A\,S),$$

so hat man die Zerlegung in totalstetigen und singulären Bestandteil vor sich.

3. Wählt man für $\mathfrak{R}$ die Menge aller Teilmengen des Intervalls (0, 1), für $\mathfrak{R}$ die Menge aller nach LEBESGUE meßbaren Teilmengen dieses Intervalls und für m das LEBESGUEsche Maß, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}$ und das Σ-System $\mathfrak{S}$ hat die Eigenschaft, daß jedes von Null verschiedene Element echte Teile besitzt. Das ermöglicht es uns zu zeigen, daß das allgemeinste distributive Gesetz in vollständigen BOOLEschen Ringen nicht zu gelten braucht. Durchläuft nämlich A_ν alle Elemente von $\mathfrak{S}$, so ist

$$\Pi(A_\nu + \bar{A}_\nu) = E.$$

Multipliziert man aber das Produkt aus, so ist jeder Summand B gleich Null, denn sonst käme unter den Faktoren von B ein echter Teil oder das Komplement eines echten Teiles von B vor, was beides unmöglich ist.

4. Das Σ-System $\mathfrak{S}$ von 1. kann Elemente ohne echte Teile besitzen, aber höchstens abzählbar viele, da $m(E)$ sonst nicht endlich sein könnte. Diese Elemente seien (im Falle der Existenz) $T_1, T_2, \ldots$. Das Element A von $\mathfrak{S}$ sei zu allen T_ν fremd. Dann enthält A Elemente beliebig kleinen Maßes. Denn wäre

$$g = \inf_{B \subseteq A} m(B) > 0,$$

so könnte ein $C \subseteq A$ mit $m(C) < 2g$ keinen echten Teil besitzen. Ist nun $\lambda < m(A)$, so gibt es demnach ein $B_1 \subseteq A$ mit $m(B_1) \leqq \lambda$. Ist $m(B) < \lambda$, so gibt es ein $B_2 \subseteq A + B_1$ mit $m(B_1 + B_2) \leqq \lambda$. So erhält man zu jeder Zahl ν eines gewissen Abschnitts von Ordnungszahlen ein B_ν. Diese B_ν, die natürlich nur eine abzählbare Menge bilden, sind paarweise fremd; das Verfahren endet, sobald $m(\sum B_\nu) = \lambda$ ist. Zu jedem A, das zu allen T_ν fremd ist, und jedem $\lambda < m(A)$ gibt es demnach ein $B \subseteq A$ mit $m(B) = \lambda$.

Ich nehme nun der Einfachheit halber an, daß keine T_ν vorhanden seien. A sei ein nichtmeßbares Element von $\mathfrak{R}$, falls es solche gibt. Ist

$$K \subseteq A \subseteq H \quad \text{und} \quad m(K) = m_i(A), \quad m(H) = m_a(A),$$

so haben wir in $H + K$ ein meßbares Element, das ein nichtmeßbares Element $A + K$ mit

$$m_i(A + K) = 0, \quad m_a(A + K) = m(H + K)$$

enthält. Besitzt $E + H + K$ noch nichtmeßbare Teile, so können wir ein weiteres Element mit derselben Eigenschaft abspalten. Ist S die Summe der so abgespalteten Elemente (die natürlich nur in der Anzahl $\aleph_0$ vorhanden sind), so enthält S ein nichtmeßbares Element N des inneren Maßes Null und des äußeren Maßes $m(S)$. Man muß hierbei

nur beachten, daß $m_i(\sum A_\nu) = \sum m_i(A_\nu)$ und $m_a(\sum A_\nu) = \sum m_a(A_\nu)$ ist, falls die A_ν in paarweise fremden meßbaren Elementen enthalten sind.

Man kann E in zwei paarweise fremde meßbare Teile R und S zerlegen (von denen eventuell nur einer von Null verschieden ist), so daß R nur meßbare Teile besitzt und zu jedem $A \subseteq R$ und jedem $\lambda < m(A)$ ein $B \subseteq A$ mit $m(B) = \lambda$ enthält, während zu jedem $A \subseteq S$ und zu jedem Zahlenpaar $\lambda_1 \leq \lambda_2$ mit $\lambda_1 \leqq m_i(A)$, $\lambda_2 \leqq m_a(A)$ ein $B \subseteq A$ mit $m_i(B) = \lambda_1$, $m_a(B) = \lambda_2$ existiert. Die Behauptung über R folgt unmittelbar aus dem obigen. Um ein B mit den in der Behauptung über S genannten Eigenschaften herzustellen, kann man folgendermaßen verfahren: Zunächst wähle man ein in dem meßbaren Element $K \subseteq A$ mit $m(K) = m_i(A)$ enthaltenes meßbares B_1 mit $m(B_1) = \lambda_1$. Ist

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqq m_a(A) - m_i(A),$$

so setze man $B_2 = A + K$ und wähle ein $B_3 \subseteq K + B_1$ mit

$$m(B_3) = \lambda_2 - \lambda_1 - m_a(A) + m_i(A).$$

Wegen

$$\lambda_2 - \lambda_1 - m_a(A) + m_i(A) \leqq m(K) - m(B_1) = m_i(A) - \lambda_1$$

ist dies möglich. $B = B_1 + B_2 + B_3 N$ besitzt die verlangten Eigenschaften. — Ist

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leqq m_a(A) - m_i(A),$$

so sei H das meßbare Element $\supseteq A$ mit $m(H) = m_a(A)$; man setze B_2 gleich einem in $H + K$ enthaltenen meßbaren Element des Maßes $\lambda_2 - \lambda_1$, was wegen $\lambda_2 - \lambda_1 \leqq m(H + K)$ möglich ist. Dann besitzt $B_1 + B_2 N$ die gewünschten Eigenschaften.

$\mathfrak{R}$ sei ein Boolescher Ring, in dem Verknüpfungen abzählbar vieler Elemente erklärt sind, $\mathfrak{r}$ ein Teilring von $\mathfrak{R}$, in dem eine additive, nichtnegative Maßfunktion $m(A)$ definiert ist, $\mathfrak{M}$ die Menge aller bezüglich m meßbaren Elemente von $\mathfrak{R}$. Jedes $A \in \mathfrak{M}$ enthalte für $m(A) > 0$ ein $B \in \mathfrak{M}$ mit

$$0 < m(B) < m(A).$$

Es sei $A \in \mathfrak{M}$ und $0 < \lambda < m(A)$. Ich behaupte, daß ein $B \subseteq A$ mit $m(B) = \lambda$ vorhanden ist.

Um dies zu beweisen, betrachte ich das aus $\mathfrak{M}$ nach dem MacNeilleschen Verfahren[9]) gebildete Σ-System $\mathfrak{T}$. Aus 4. folgt dann, daß es zu zwei Zahlen λ_1, λ_2 mit

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq m(A) \qquad (A \in \mathfrak{M})$$

9) MacNeille, *Extensions of measure*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 24 (1938), S. 188—193.

ein in A enthaltenes $B \in \mathfrak{M}$ gibt, so daß

$$\lambda_1 \leqq m(B) \leqq \lambda_2$$

ist. Nun sei

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \lambda$$

und

$$m(A) > \nu_1 > \nu_2 > \cdots \to \lambda.$$

Es gibt ein in A enthaltenes Element C_1 von $\mathfrak{M}$ mit

$$\nu_1 \leqq m(C_1) \leqq m(A)$$

und ein $B_1 \subseteq C_1$ mit

$$0 \leqq m(B_1) \leqq \mu_1.$$

Ferner existieren Elemente B_2, C_2 mit

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq C_2 \subseteq C_1$$

und

$$\mu_1 \leqq m(B_2) \leqq \mu_2, \quad \nu_1 \geqq m(C_2) \geqq \nu_2 \text{ usw.}$$

Dann ist

$$B_1 + B_2 + \cdots \subseteq C_1 C_2 \cdots,$$

$$\lambda \leqq m_i(B_1 + B_2 + \cdots) \leqq m_a(C_1 C_2 \cdots) \leqq \lambda,$$

also $B_1 + B_2 + \cdots$ meßbar und vom Maß λ.[10])

5. Sind in $\mathfrak{S}$ Elemente T_ν vorhanden, so können zwei Fälle eintreten. Ein Element A von $\mathfrak{M}$, das in einer Restklasse T_ν liegt, enthält entweder nur meßbare oder auch nichtmeßbare Teile. In beiden Fällen können als Maßzahlen nur 0 und $m(A)$ auftreten. Beispiele für den ersten Fall liegen auf der Hand, aber auch der zweite kommt vor. Ist E die Menge der Ordnungszahlen $< \omega_1$ (wo ω_1 die zur Mächtigkeit $\aleph_1$ gehörende Anfangszahl ist), $\mathfrak{R}$ die Menge aller Teilmengen von E, $\mathfrak{R}$ die Menge aller derjenigen Teilmengen von E, die entweder selbst endlich oder abzählbar sind oder ein endliches oder abzählbares Komplement besitzen, so setze ich für $A \in \mathfrak{R}$ im ersten Fall $m(A) = 0$, im zweiten $m(A) = 1$. Dann gilt $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}$, und die Funktion $m(A)$ ist endlich, nichtnegativ und nach bekannten Sätzen der Mengenlehre totaladditiv. Jedes Element von $\mathfrak{R}$, das zugleich mit seinem Komplement nichtabzählbar ist, besitzt das innere Maß 0 und das äußere Maß 1. Meßbare Elemente von einem Maß zwischen 0 und 1 kann es offenbar nicht geben.

---

10) Vgl. zu den hier bewiesenen Sätzen: a) W. Sierpiński, *Sur les fonctions d'ensembles additives et continues*. Fundamenta math. 3 (1922), S. 240—246; b) M. Fréchet, *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*. Fundamenta math. 4 (1923), S. 329—365; c) H. Hahn, *Über unendliche Reihen und absolutadditive Mengenfunktionen*. Bull. Calcutta Math. Soc. 20 (1928), S. 227—238.

6. Über die beiden Maßfunktionen m und μ mögen jetzt die am Anfang von 2. gemachten Voraussetzungen zutreffen. Ich gehe wieder zu dem System $\mathfrak{S}$ über und bilde eine Folge von immer feiner werdenden Zerlegungen des Einheitselements von $\mathfrak{S}$; die n-te Zerlegung habe die Form $E = \sum_i A_{ni}$. Ich betrachte nun zu jedem n die Funktion f_n, die auf A_{ni} den Wert $\frac{\mu(A_{ni})}{m(A_{ni})}$ annimmt. Die Folge f_n konvergiert nach einer Grenzfunktion f, die aber nicht mit derjenigen übereinzustimmen braucht, deren Integral μ ist, da die Zerlegungen gewissermaßen zu grob sein könnten. Um die Konvergenz der Folge f_n zu beweisen, benutze ich die Tatsache, daß sich der von den A_{ni} erzeugte Boolesche Ring bei Hinzufügung abzählbarer Summen und Produkte auf einen Teilring des speziellen in 3. genannten Ringes $\mathfrak{S}$, den ich hier mit $\mathfrak{S}_0$ bezeichnen will, isomorph abbilden läßt (man hat eventuell statt des Intervalles (0, 1) ein anderes zugrundezulegen), und zwar so, daß zugeordnete Elemente gleiches Maß haben und daß die den A_{ni} entsprechenden Elemente von $\mathfrak{S}_0$ Restklassen sind, die Intervalle als Elemente enthalten.[11]) Man kann sich also auf folgenden Fall beschränken:

In $\mathfrak{S}_0$ ist eine Maßfunktion μ gegeben; man bildet eine Folge von Intervalleinteilungen des Einheitselements von $\mathfrak{S}_0$ und betrachtet zur n-ten Zerlegung die Funktion f_n, die auf A_{ni} gleich $\frac{\mu(A_{ni})}{m(A_{ni})}$ ist. Wir bilden jetzt die entsprechende Zerlegung des Intervalles $(0, a)$, von dem man bei der Konstruktion von $\mathfrak{S}_0$ auszugehen hat, und betrachten die analog definierte Funktionenfolge f_n'. Nun erinnern wir uns an den Lebesgueschen Differentiationsprozeß. Zu jedem x des Intervalls $(0, a)$ werden Folgen $\frac{\mu(B_\nu)}{m(B_\nu)}$ betrachtet, bei denen zu jedem B_ν ein Intervall C_ν mit $\frac{m(B_\nu)}{m(C_\nu)} \geqq \alpha$ existiert. Die Menge der zugelassenen Folgen wird dann erweitert, indem man α nach 0 konvergieren läßt. Aus den Lebesgueschen Differentiationssätzen folgt, da in unserem Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ ausreicht, daß die Folge f_n' fast überall konvergiert. Hieraus kann man schließen, daß die Folge f_n überall konvergiert. Wenn sich der Ring $\mathfrak{S}$ auf einen Teilring von $\mathfrak{S}_0$ isomorph abbilden läßt, so gibt es sogar eine feste Folge von Zerlegungen des Einheitselementes, so daß das Integral der Grenzfunktion bei jedem μ gleich μ ist; im anderen Fall gilt dies nicht.

11) Vgl. hierzu C. Carathéodory, *Die Homomorphien von Semen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen.* Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. (2), 8 (1939), S. 105—130.

7. $\mathfrak{M}$ kann homomorph auf $\mathfrak{S}$ abgebildet werden, so daß also Produkte in $\mathfrak{M}$ den in $\mathfrak{S}$ gebildeten Produkten entsprechen. Nach I, 8. kann man daraus schließen, daß der aus $\mathfrak{R}$ nach I. zu konstruierende vollständige BOOLEsche Ring homomorph auf einen Teilring von $\mathfrak{S}$ abgebildet werden kann. Denn dieser vollständige BOOLEsche Ring enthält $\mathfrak{M}$ und läßt sich daher auf den aus $\mathfrak{M}$ konstruierbaren BOOLEschen Ring $\mathfrak{T}$ homomorph abbilden. Da $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{S}$ homomorph abgebildet werden kann, gibt es nach der am Schluß von I, 8. gemachten Bemerkung eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf einen Teilring des aus $\mathfrak{S}$ konstruierbaren vollständigen BOOLEschen Ringes, der aber mit $\mathfrak{S}$ identisch ist, da $\mathfrak{S}$ selbst schon vollständig ist. Insgesamt haben wir also eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf einen Teilring von $\mathfrak{S}$.

Nun beachte man noch folgendes: Ist das multiplikative System $\mathfrak{L}$ ein BOOLEscher Ring, so kann man erreichen, daß im letzten Satz von I, 8. die Elemente von $\mathfrak{L}$ auf die bei dem Homomorphismus $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ entsprechenden Elemente von $\mathfrak{L}'$ abgebildet werden. Ist die soeben vorgekommene Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf einen Teilring von $\mathfrak{S}$ so gewählt, so ergibt sich der Satz:

Sind in dem Teilring $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ebenso wie in $\mathfrak{R}$ selbst Verknüpfungen abzählbar vieler Elemente ausführbar und ist in $\mathfrak{M}$ eine endliche, nichtnegative, totaladditive Funktion m definiert, so läßt sich der Definitionsbereich von m so auf $\mathfrak{R}$ erweitern, daß m additiv bleibt.

8. Der letzte Satz gilt auch dann, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ nicht alle Summen und Produkte abzählbar vieler Elemente enthalten, wobei man dann von m nur Additivität zu verlangen hat.

In 7. wurde die Totaladditivität nur benutzt, als wir die Tatsache heranzogen, daß $\mathfrak{S}$ ein vollständiger BOOLEscher Ring ist. Das ist bei bloßer Additivität von m nicht mehr der Fall. Die homomorphe Abbildung des aus $\mathfrak{R}$ konstruierten BOOLEschen Ringes auf $\mathfrak{T}$ und die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf einen Teilring des aus $\mathfrak{S}$ konstruierten BOOLEschen Ringes $\mathfrak{S}'$, also insgesamt eine homomorphe Abbildung des aus $\mathfrak{R}$ konstruierten BOOLEschen Ringes auf einen Teilring von $\mathfrak{S}'$ können wir aus 7. übernehmen. Nach I, 8. kann $\mathfrak{S}'$ ein Teilsystem des aus $\mathfrak{S}$ nach MACNEILLE gebildeten Σ-Systems $\mathfrak{S}''$ abgebildet werden, so daß also eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf einen Teilring von $\mathfrak{S}''$ existiert. Hieraus folgt die Behauptung.

9. $\mathfrak{S}$ sei ein Σ-System, $\mathfrak{M}_0$ ein isomorpher Mengenring (dem Nullelement von $\mathfrak{S}$ entspreche die Nullmenge), $\mathfrak{M}$ der kleinste BOOLEsche Ring über $\mathfrak{M}_0$, der Summen und Produkte abzählbar vieler Elemente enthält. In $\mathfrak{M}$ läßt sich eine totaladditive Maßfunktion definieren, die

für Elemente von $\mathfrak{M}_0$ mit der gegebenen übereinstimmt. Bildet man den Restklassenring $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{N}$ die Menge der Elemente des Maßes Null bedeutet, so erhält man ein zu $\mathfrak{S}$ (auch bezüglich Verknüpfungen beliebig vieler Elemente) isomorphes Σ-System.

Zum Beweis seien $A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots$ zwei nicht abnehmende Folgen von Mengen aus $\mathfrak{M}_0$, die als Summe dieselbe Menge haben; $A_1', A_2', \ldots$ und $B_1', B_2', \ldots$ seien die (ebenfalls nicht abnehmenden) Folgen der entsprechenden Elemente von $\mathfrak{S}$. Wir behaupten zunächst

$$\sum A_\nu' = \sum B_\nu'.$$

Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein Element $C \neq 0$, das etwa in A_1' enthalten und zu allen B_ν' fremd wäre. Die C entsprechende Menge wäre dann in A_1 enthalten und zu allen B_ν fremd. Dann kann aber nicht $\sum A_\nu = \sum B_\nu$ sein. Ordnet man also jeder Menge, die sich als Summe $\sum A_\nu$ einer monoton nicht abnehmenden Folge von Mengen aus $\mathfrak{M}_0$ darstellen läßt, als Maß die Zahl $m(\sum A_\nu')$ zu, so ist dieses Maß eindeutig definiert. Entsprechendes gilt für das Produkt. Ist

$$\prod A_\nu \subseteq \sum B_\nu,$$

so ist

$$\sum (\bar{A}_\nu + B_\nu) = E,$$

woraus

$$m(\prod A_\nu) \leqq m(\sum B_\nu)$$

folgt. Die Menge der Elemente von $\mathfrak{M}$, die sich als Produkt abzählbar vieler Elemente von $\mathfrak{M}_0$ darstellen lassen, sei $\mathfrak{M}_\delta$; entsprechend bedeute $\mathfrak{M}_\sigma$ die Menge der Elemente von $\mathfrak{M}$, die gleich der Summe abzählbar vieler Elemente von $\mathfrak{M}_0$ sind. Bildet man für $A \in \mathfrak{M}$

$$m_i(A) = \sup_{\substack{B \in \mathfrak{M}_\delta \\ B \subseteq A}} m(B), \quad m_a(A) = \inf_{\substack{B \in \mathfrak{M}_\sigma \\ B \supseteq A}} m(B),$$

so gilt wie in der gewöhnlichen Lebesgueschen Theorie der Satz, daß für meßbare A_ν mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ auch $\sum A_\nu$ meßbar ist und

$$m(\sum A_\nu) = \lim m(A_\nu)$$

gilt. Hieraus schließt man, daß in $\mathfrak{M}$ jedes Element meßbar ist und daß m totaladditiv ist.[12]) Wir sehen also, daß sich jedes Σ-System durch Restklassenbildung aus einem Mengenring gewinnen läßt.

12) A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik 2, Heft 3 (1933).

IV. Weiteres über Ortsfunktionen.

1. Jedem von Null verschiedenen Element A einer teilweise geordneten Menge $\mathfrak{L}$ von der in I, 2. beschriebenen Art werde eine reelle Zahl $\alpha'(A)$ zugeordnet, und es sei $\alpha'(A) \geqq \alpha'(B)$ für $A \subseteq B$. Ist K ein Element des aus $\mathfrak{L}$ konstruierten vollständigen BOOLEschen Ringes $\mathfrak{R}$, so setze ich

$$\bar{\alpha}(K) = \sup \inf_{\nu} \alpha'(A_\nu),$$

wo die obere Grenze zu bilden ist für alle Elemente $(A_1, A_2, \ldots)$ von $\mathfrak{R}'$, die zur Restklasse K gehören. Ich behaupte, daß durch dieses $\bar{\alpha}$ in $\mathfrak{R}$ eine Ortsfunktion gegeben ist.

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß für $A \subseteq B$

$$\bar{\alpha}(A) \geqq \bar{\alpha}(B)$$

ist. Es sei $(B_1, B_2, \ldots)$ ein zur Restklasse B gehörendes Element von $\mathfrak{R}'$, für das

$$\bar{\alpha}(B) \leqq \inf_{\nu} \alpha'(B_\nu) + \varepsilon$$

gilt. Gehört $(C_{\nu 1}, C_{\nu 2}, \ldots)$ zur Restklasse $A B_\nu$, so muß

$$\alpha'(C_{\nu\mu}) \geqq \alpha'(B_\nu)$$

sein, und es ist

$$\bar{\alpha}(A) = \bar{\alpha}(A B) \geqq \inf_{\nu,\mu} \alpha'(C_{\nu\mu}) \geqq \inf_{\nu} \alpha'(B_\nu) \geqq \bar{\alpha}(B) - \varepsilon,$$

also

$$\bar{\alpha}(A) \geqq \bar{\alpha}(B).$$

Um zu zeigen, daß durch $\bar{\alpha}$ in $\mathfrak{R}$ eine Ortsfunktion gegeben ist, brauche ich nur Gleichung (4) zu beweisen. Ist $(A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots)$ ein zur Restklasse A_ν von $\mathfrak{R}$ gehörendes Element von $\mathfrak{R}'$, für das

$$\bar{\alpha}(A_\nu) \leqq \inf_{\mu} \alpha'(A_{\nu\mu}) + \varepsilon$$

gilt, so ist, da $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{21}, A_{22}, \ldots)$ zur Restklasse $\sum A_\nu$ gehört,

$$\bar{\alpha}(\sum A_\nu) \geqq \inf_{\nu,\mu} \alpha'(A_{\nu\mu}) \geqq \inf_{\nu} \bar{\alpha}(A_\nu) - \varepsilon,$$

$$\bar{\alpha}(\sum A_\nu) \geqq \inf_{\nu} \bar{\alpha}(A_\nu).$$

$\bar{\alpha}(\sum A_\nu) \leqq \inf_{\nu} \bar{\alpha}(A_\nu)$ folgt schon aus der weiter oben bewiesenen Monotonieeigenschaft von $\bar{\alpha}$.

2. Wenn das in $\mathfrak{L}$ gegebene α' gleich dem $\bar{\alpha}$ einer Ortsfunktion in $\mathfrak{R}$ ist, so gibt es zu jedem $A \in \mathfrak{L}$ ein von Null verschiedenes $B \in \mathfrak{R}$, so daß

$$\alpha'(C) \leqq \alpha'(A) + \varepsilon$$

ist für alle $C \subseteq B (C \neq 0)$. Da aber jedes von Null verschiedene $B \in \mathfrak{R}$ ein von Null verschiedenes $D \in \mathfrak{L}$ als Teil enthält, gibt es ein $D \in \mathfrak{L}$ $(D \neq 0)$, so daß für alle $C \subseteq D (C \neq 0)$

$$\alpha'(C) \leq \alpha'(A) + \varepsilon$$

ist. $(A_1, A_2, \ldots)$ sei ein Element von $\mathfrak{R}'$, das zu derselben Restklasse gehört wie (A) und für das $\inf_\nu \alpha'(A_\nu) \geq \alpha(A) - \varepsilon$ gilt, ferner sei

$$A_\nu D = (A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots);$$

dann hat man

$$\alpha(A) \leq \inf_\nu \alpha'(A_\nu) + \varepsilon \leq \inf_{\nu,\mu} \alpha'(A_{\nu\mu}) + \varepsilon \leq \alpha'(A) + 2\varepsilon,$$

$$\alpha(A) \leq \alpha'(A).$$

Andererseits muß $\alpha(A) \geq \alpha'(A)$ sein, da ja die Menge, die aus A allein besteht, zu der Restklasse gehört, die in I, 7. mit A identifiziert wurde; es ist also

$$\bar{\alpha}(A) = \alpha'(A).$$

Man erkennt aus diesen Überlegungen noch, daß eine Ortsfunktion durch die Werte von α in $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt ist; einfacher ergibt sich das aus der Gleichung (4) unter Beachtung der Tatsache, daß

$$A = \sum A_\nu \quad (A \in \mathfrak{R},\ A_\nu \in \mathfrak{L})$$

ist, wenn $(A_1, A_2, \ldots)$ zur Restklasse A gehört.

3. Es ist

$$\bar{\beta}(A) = \sup_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ B \subseteq A}} \alpha'(B),$$

wenn mit $\bar{\beta}$ das β der aus α' hergeleiteten Ortsfunktion bezeichnet wird. Ist nämlich C ein in A enthaltenes Element von $\mathfrak{R}$, für das die Ungleichung

$$\bar{\alpha}(C) \geq \bar{\beta}(A) - \varepsilon$$

gilt (ein solches C existiert wegen (2)), so gibt es nach der Herleitung von α ein Element $(C_1, C_2, \ldots)$ von $\mathfrak{R}'$, das zur Restklasse C gehört und für das

$$\inf_\nu \alpha'(C_\nu) \geq \alpha(C) - \varepsilon$$

ist. Dann ist jedenfalls

$$\alpha'(C_\nu) \geq \bar{\beta}(A) - 2\varepsilon,$$

also

$$\bar{\beta}(A) \leq \sup_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ B \subset A}} \alpha'(B).$$

Die Ungleichung

$$\bar{\beta}(A) \geq \sup_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ B \subset A}} \alpha'(B)$$

folgt aus $\alpha'(B) \leq \bar{\alpha}(B)$ und (2). Hiermit ist $\bar{\beta}$ durch die α' ausgedrückt, und man findet eine zweite Darstellung von $\bar{\alpha}$:

$$\alpha(A) = \inf_{C \subseteq B} \sup_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ B \subseteq C}} \alpha'(B).$$

Liegen wieder die Verhältnisse von III, 2. vor, so gilt für die Ortsfunktion, deren Integral μ ist, die Gleichung $\alpha(A) = \inf_{B \subseteq A} \frac{\mu(B)}{m(B)}$, wobei nur solche Restklassen B von $\mathfrak{S}$ zur Konkurrenz zugelassen zu werden brauchen, die Elemente von $\mathfrak{L}$ enthalten. Man braucht nur ein von Null verschiedenes Element $C \subseteq A$ ($C \in \mathfrak{S}$) zu betrachten, für das

$$\beta(C) \leqq \alpha(A) + \varepsilon$$

ist; ein solches C gibt es wegen (2). Für jedes von Null verschiedene $B \subseteq C$, $B \in \mathfrak{S}$, das ein Element von $\mathfrak{L}$ enthält (natürlich nicht als Teil, sondern als Element), ist wegen $\beta(B) = \sup_{D \subseteq B} \frac{\mu(D)}{m(D)}$

$$\frac{\mu(B)}{m(B)} \leqq \alpha(A) + \varepsilon.$$

4. Wenn zu jedem $A \neq 0$ ein γ zwischen α und β gegeben ist, so genügt das zur Festlegung der Funktion. Wir fragen jetzt, welche Eigenschaften ein beliebig definiertes γ besitzen muß, damit durch

$$\alpha(A) = \inf_{B \subseteq A} \gamma(B), \quad \beta(A) = \sup_{B \subseteq A} \gamma(B)$$

eine Ortsfunktion gegeben ist. Offenbar muß es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $A \neq 0$ zwei von Null verschiedene, in A enthaltene Elemente B und C geben, so daß

$$\alpha(B) \geqq \gamma(A) - \varepsilon, \quad \beta(C) \leqq \gamma(A) + \varepsilon$$

ist. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn wegen

$$\alpha(A) = \inf_{B \subseteq A} \gamma(B)$$

gibt es ein B mit

$$\gamma(B) \leqq \alpha(A) + \varepsilon,$$

und aus unserer Bedingung folgt die Existenz eines C mit

$$\beta(C) \leqq \gamma(B) + \varepsilon \leqq \alpha(A) + 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$\alpha(A) = \inf_{B \subseteq A} \beta(B).$$

Ebenso wird $\beta(A) = \sup \alpha(B)$ bewiesen.

V. Über die Multiplikation von Σ-Systemen.

1. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ seien zwei Σ-Systeme. Wir bilden die Menge $\mathfrak{L}$ der Elemente (U, V), wo $U \in \mathfrak{U}$ und $V \in \mathfrak{V}$ sei, und setzen fest, daß dann und nur dann $(U, V) = (U', V')$ sein soll, wenn entweder (mindestens) eins der Elemente U, V und (mindestens) eins der Elemente U', V' gleich dem Nullelement von $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ ist oder $U = U'$ und $V = V'$ ist.

Ferner definieren wir

$$(U, V) \cdot (U', V') = (UU', VV'),$$

wodurch $\mathfrak{L}$ zu einem multiplikativen System wird. Die Elemente (U, V), bei denen U oder V gleich Null ist, sind gleich dem Nullelement von $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ besitzt die Eigenschaft von I, 2.; denn ist $(U, V) \neq (U', V')$ und $U = 0$, so ist (U', V') ein von dem Nullelement verschiedenes, zu (U, V) fremdes und in (U', V') enthaltenes Element von $\mathfrak{L}$. Sind U, V, U', V' sämtlich von Null verschieden und ist $U \supseteq U'$, so ist $(U + U', V)$ von Null verschieden, zu (U', V') fremd und in (U, V) enthalten. Ist nicht $U \supseteq U'$, so ist $(U'U + U', V')$ von Null verschieden, in (U', V') enthalten und zu (U, V) fremd. Wir können also $\mathfrak{L}$ nach I. zu einem vollständigen Booleschen Ring $\mathfrak{P}'$ erweitern. Sind u und v die in $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ definierten Maßfunktionen, so wird man versuchen, in $\mathfrak{P}'$ eine totaladditive Maßfunktion p mit

$$p(U, V) = u(U)v(V)$$

einzuführen. Da aber die Totaladditivität Schwierigkeiten macht, schlagen wir einen etwas anderen Weg ein. Wir behalten von $\mathfrak{P}'$ nur den von $\mathfrak{L}$ erzeugten Booleschen Ring $\mathfrak{P}_0$ bei. In ihm läßt sich eine additive Maßfunktion p mit der verlangten Eigenschaft erklären. Nun erweitern wir $\mathfrak{P}_0$ nach dem MacNeilleschen Verfahren zu einem Σ-System $\mathfrak{P}$.

2. $\mathfrak{M}_u$ und $\mathfrak{M}_v$ seien zu $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ isomorphe Mengenringe. Wir ordnen jedem $(U, V) \in \mathfrak{L}$ das mengentheoretische Produkt[13]) der U und V entsprechenden Mengen zu. Das System $\mathfrak{M}_l$ dieser Mengen ist ein zu $\mathfrak{L}$ bezüglich der Multiplikation isomorphes Mengensystem, aber es gilt noch mehr: Der von $\mathfrak{M}_l$ erzeugte Boolesche Ring $\mathfrak{M}_0$ ist ein zu $\mathfrak{P}_0$ isomorphes Mengensystem. Das ergibt sich aus der Darstellung der Elemente von $\mathfrak{M}_0$ bzw. $\mathfrak{P}_0$ als Summen paarweise fremder Elemente von $\mathfrak{M}_l$ bzw. $\mathfrak{L}$.

Wird $\mathfrak{M}_0$ zu einem Booleschen Ring $\mathfrak{M}$ erweitert, in dem auch Summen und Produkte abzählbar vieler Elemente erklärt sind, so läßt sich der Definitionsbereich von p so auf $\mathfrak{M}$ erweitern, daß p totaladditiv bleibt[14]); man erhält aus $\mathfrak{M}$ durch Restklassenbildung nach dem Ring der Elemente des Maßes Null ein zu $\mathfrak{P}$ isomorphes Σ-System. Das folgt aus dem Satz: $\mathfrak{P}_0$ sei ein Boolescher Ring, in dem eine nichtnegative, additive Maßfunktion definiert ist. $\mathfrak{M}_0$ sei ein zu $\mathfrak{P}_0$ isomorphes

13) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*. 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1935, Kap. I, § 4.

14) H. Hahn, *Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen*. Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa. Sci. fis. mat. (2) 2 (1933), S. 429—452.

Mengensystem, $\mathfrak{M}$ der kleinste $\mathfrak{M}_0$ enthaltende Mengenring, in dem Verknüpfungen abzählbar vieler Elemente sind. Wir nehmen an, daß in $\mathfrak{M}$ eine totaladditive Maßfunktion existiert, die für Elemente von $\mathfrak{M}_0$ mit dem Maß der entsprechenden Elemente von $\mathfrak{P}_0$ übereinstimmt. $\mathfrak{N}$ sei der Teilring von $\mathfrak{M}$, der durch die Elemente des Maßes Null gebildet wird. Dann ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ dem aus $\mathfrak{P}_0$ nach MACNEILLE gebildeten Σ-System isomorph.

Diese Multiplikation von Σ-Systemen ist eine Verallgemeinerung der von CARATHÉODORY[15]) angegebenen Konstruktion.

VI. Bemerkungen über eine Konstruktion von Stone.

Für den Fall, daß $\mathfrak{L}$ ein BOOLEscher Ring ist, hat schon STONE[16]) eine Konstruktion angegeben, die mit der in I. durchgeführten in Zusammenhang steht. STONE betrachtet die Menge aller Ideale des BOOLEschen Ringes $\mathfrak{L}$. Ideale sind jedenfalls halbnormale Elemente von $\mathfrak{R}'$. Wird also, wie es bei STONE geschieht, die Addition als Bildung der Vereinigungsmenge, die Multiplikation als Bildung des Durchschnitts definiert, so stimmt das bei der Addition allgemein, bei der Multiplikation bei endlich vielen Faktoren mit unseren Definitionen überein. Eine Äquivalenzrelation, wie wir sie in I, 4. eingeführt haben, benutzt STONE ebenfalls, erklärt sie aber etwas anders. Er sagt nämlich: Die Elemente A und B von $\mathfrak{R}'$ (STONE setzt sie als Ideale voraus, was nicht notwendig ist) heißen äquivalent, wenn sie dasselbe Komplement haben. Nach I, 6. ist das mit unserer Definition identisch. Wenn $A_\nu \sim A_\nu'$ ist, so braucht bei STONES Definition im Falle von unendlich vielen Faktoren nicht $\prod A_\nu \sim \prod A_\nu'$ zu sein; deshalb beschränkt sich STONE späterhin[17]) auf Produkte mit endlich vielen Faktoren.

15) A. a. O. [11]).
16) A. a. O. [4a]).
17) Vgl. a. a. O. [4a]), Theorem 28.

Lebenslauf.

Am 5. Juli 1920 bin ich, Artur Bischof, in Liegnitz in Schlesien als Sohn des Stadtamtsmeisters Richard Bischof und seiner Ehefrau Berta geboren. Von Ostern 1926 bis Ostern 1930 besuchte ich die Lutherschule in Liegnitz. Ostern 1930 trat ich in die Liegnitzer Oberrealschule ein. Diese Schule verließ ich nach bestandener Reifeprüfung Ostern 1937. Im Sommersemester 1937 und im Wintersemester 1937/38 studierte ich an der Technischen Hochschule zu Breslau. Im Sommerhalbjahr 1938 genügte ich meiner Arbeitsdienstpflicht. Nach der Entlassung aus dem Arbeitsdienst setzte ich mein Studium an der Universität Breslau fort. Vom Wintersemester 1939/40 bis zum 2. Trimester 1940 war ich an der Universität Berlin immatrikuliert. Am 1. April 1940 wurde ich Hilfsassistent am Mathematischen Institut. Ich hörte Vorlesungen bei den Professoren Feigl, Geppert, Radon, Schmeidler, E. Schmidt (Mathematik), Henning, v. Laue, Waetzmann (Physik), ten Bruggencate, Guthnick, Kopff (Astronomie).